

FIZICĂ

manual pentru clasa a XI-a

Cap. I	OSCILAȚII ȘI UNDE MECANICE	5
	1.1 OSCILATORUL MECANIC	5
	1.1.1 Fenomene periodice. Procese oscilatorii în natură și în tehnică	5
	1.1.2 Mărimi caracteristice mișcării oscilatorii	6
	1.1.2.1 Cinematica mișcării oscilatorii liniar armonice	7
	1.1.2.2 Studiul experimental al unor procese oscilatorii libere simple	15
	1.1.3 Descrierea cantitativă din punct de vedere energetic a oscilatorului armonic	20
	1.1.4 Oscilator mecanic liber cu frecare. Amortizarea	24
	1.1.5 Compunerea oscilațiilor	26
	1.1.5.1 Compunerea a două oscilații armonice paralele și de aceeași frecvență	26
	1.1.5.2* Compunerea oscilațiilor paralele cu frecvențe puțin diferite. Fenomenul de bătăi	28
	1.1.5.3 Compunerea oscilațiilor perpendiculare	30
	1.2 OSCILATORI MECANICI CUPLAȚI	32
	1.2.1 Oscilații întreținute. Oscilații forțate	32
	1.2.2 Rezonanța	33
	1.2.3 Consecințe și aplicații	35
	1.3 UNDE MECANICE. PROPAGAREA UNDELOR MECANICE	37
	1.3.1 Propagarea unei perturbații într-un mediu elastic. Transferul de energie	37
	1.3.2 Modelul „unda plană”. Periodicitatea spațială și temporală	44
	1.3.3 Reflexia și refracția undelor mecanice	47
	1.3.4 Unde seismice	52
	1.3.5 Interferența undelor mecanice. Unde staționare	54
	1.3.5.1 Interferența undelor sinusoidale	55
	1.3.5.2 Unde staționare	58
	1.3.6 Acustica	61
	1.3.7* Difracția undelor mecanice	65
	1.3.8 Ultrasunete și infrasunete. Aplicații în medicină, industrie și tehnică militară	67
Cap. II	OSCILAȚII ȘI UNDE ELECTROMAGNETICE	71
	2.1 OSCILAȚII ELECTROMAGNETICE LIBERE	71
	2.1.1 Descărcarea unui condensator (C) printr-o bobină ideală (L)	71
	2.1.2 Descărcarea unui condensator (C) printr-o bobină reală (L, r)	77
	2.2 CIRCUITUL R, L, C ÎN CURENT ALTERNATIV	80
	2.2.1 Circuitul serie (R, L, C) în curent alternativ	80
	2.2.2 Analiza și descrierea din punct de vedere energetic a funcționării circuitelor de curent alternativ	93
	2.2.3* Rezolvarea rețelelor de curent alternativ	98
	2.2.4* Circuitul paralel bobină-condensator. Rezonanța circuitului paralel	101
	2.2.5 Funcționarea în regim de rezonanță a unor circuite de curent alternativ	105

2.3	CÂMPUL ELECTROMAGNETIC. UNDA ELECTROMAGNETICĂ	107
2.3.1	Câmpul electromagnetic	107
2.3.2	Propagarea câmpului electromagnetic	109
2.3.3	Unda electromagnetică plană.	
	Utilizarea relațiilor dintre mărimile caracteristice	111
2.4	CLASIFICAREA UNDELOR ELECTROMAGNETICE	113
2.5	APLICAȚII	115
2.5.1	Explicarea calitativă a utilizării undelor electromagnetice în funcționarea radioului și televiziunii	115
2.5.2	Alte aplicații ale undelor electromagnetice	117
Cap. III	OPTICA ONDULATORIE	119
3.1	DISPERSIA LUMINII	119
3.1.1	Interpretarea electromagnetică a dispersiei.	
	Aplicarea în știință și tehnică a fenomenului de dispersie	120
3.2	INTERFERENȚA LUMINII	122
3.3	DISPOZITIVUL LUI YOUNG	124
3.4	INTERFERENȚA LOCALIZATĂ. APLICAȚII	126
3.4.1	Alte dispozitive interferențiale	128
3.5*	DIFRAȚIA LUMINII	133
3.6*	REȚEAUA DE DIFRAȚIE. APLICAȚII	135
3.7*	POLARIZAREA LUMINII	138
Cap. IV	ELEMENTE DE TEORIA HAOSULUI	145
4.1*	DETERMINISM ȘI PREDICTIBILITATE. CONDIȚII. MODELE	145
4.2*	DETERMINISM ȘI IMPREDICTIBILITATE. COMPORTAMENTUL HAOTIC. CONDIȚII	145
4.3*	DESCRIEREA COMPORTAMENTULUI HAOTIC. SPAȚIUL FAZELOR. ATRACTORI CLASICI ȘI STRANII	147
4.3.1	Spațiul fazelor	147
4.3.2	Atractori clasici și stranii	148
4.4*	ELEMENTE DE GEOMETRIE FRACTALĂ	150
4.4.1	Caracteristicile unui fractal	151
4.4.2	Tipuri de fractali	152
	RĂSPUNSURI	156
	BIBLIOGRAFIE	158

1.1 OSCILATORUL MECANIC

1.1.1 Fenomene periodice. Procese oscilatorii în natură și în tehnică

În viața de toate zilele întâlnim deseori mișcări în care un sistem mecanic, scos din poziția sa de echilibru și lăsat liber, este readus în acea poziție cu o anumită viteză, sub acțiunea unei *forțe de revenire*; de aici, datorită *inerției*, el își continuă mișcarea în sens opus. Corpul este adus din nou de către forța de revenire în poziția de echilibru, de unde mișcarea continuă datorită inerției.

Mișcarea de dus-întors efectuată de o parte și de cealaltă a poziției de echilibru poartă numele de oscilație sau vibrație.

Un exemplu cunoscut este mișcarea pendulului constituit dintr-un corp de masă m suspendat de un fir inextensibil (fig. 1.1). În poziția de echilibru (O), corpul atârna de firul vertical. Când este scos din această poziție și apoi eliberat (din poziția A , spre exemplu), corpul începe să oscileze de o parte și de alta a poziției de echilibru, descriind un arc de cerc, într-un mod regulat și care se repetă. Forța care face corpul să revină de fiecare dată spre poziția de echilibru este componenta tangențială a greutateții, \vec{G}_t . Ea joacă rol de forță de revenire. Masa m a corpului, măsură a inerției acestuia, determină continuarea oscilației la fiecare trecere prin poziția de echilibru.

Un alt exemplu de sistem mecanic oscilant este o lamă elastică de oțel fixată cu un capăt într-o menhină (fig. 1.2). Deplasând lateral capătul superior și eliberându-l, lama începe să vibreze (oscileze) în jurul poziției verticale de echilibru. Pentru orice poziție instantanee M , forța de revenire este forța elastică ce ia naștere în lama deformată și este orientată spre poziția ei de echilibru. Cum forța elastică depinde de deformare, iar aceasta variază în timpul oscilației, ne așteptăm ca și accelerația pe care forța de revenire o imprimă lamei să depindă de deformare. Cu cât lama se îndepărtează mai mult de poziția de echilibru, deci cu cât deformarea ei (săgeata) \vec{s} este mai mare, cu atât forța elastică și accelerația sunt mai mari în modul. Remarcați că atât sensul forței elastice, cât și sensul accelerației sunt opuse sensului deformării \vec{s} .

Când lama se îndepărtează de poziția de echilibru, mișcarea ei este încetinită, astfel că la capătul cursei viteza oscilatorului se anulează. În acest moment, forța elastică este maximă și accelerația de asemenea. Revenirea la poziția de echilibru este o mișcare accelerată (viteza și accelerația având același sens). Viteza devine maximă la trecerea prin poziția de echilibru, poziție în care forța de revenire și accelerația se anulează. Mișcarea continuă în sens opus, încetinită la dus și accelerată la întoarcere.

O mișcare oscilatorie liniară (rectilinie) efectuează și corpul din fig. 1.3, suspendat de un resort elastic de masă neglijabilă. Și aici forța de revenire este forța elastică.

Studiul acestui oscilator elastic va face obiectul unui paragraf special.

Putem menționa multe alte exemple de oscilatori mecanici: balansierul unui ceas, pistonul unui motor cu ardere internă, corzile unui instrument muzical, nodurile (atomii, ionii) rețelei cristaline a unui corp solid care vibrează în jurul pozițiilor lor de echilibru etc. Inima este de asemenea un sistem oscilant. Toate instrumentele muzicale comportă, așa cum veți vedea în paragraful de acustică, sisteme oscilante.

Fig. 1.1

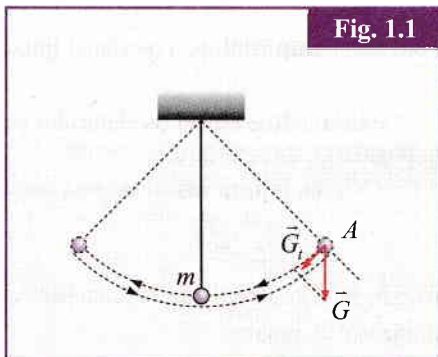


Fig. 1.2

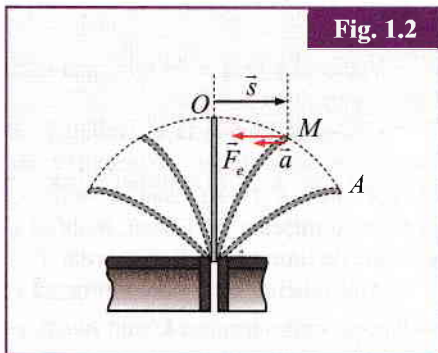
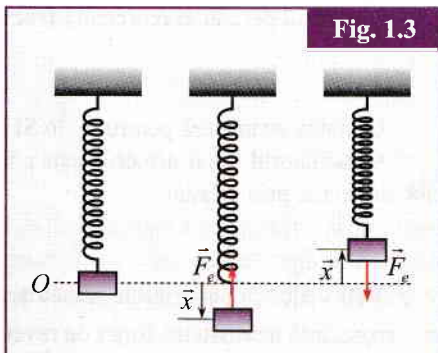


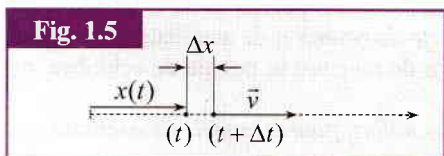
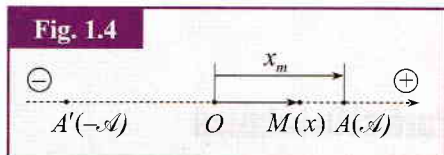
Fig. 1.3



1.1.2 Mărimi caracteristice mișcării oscilatorii

Vom studia mai întâi oscilatorii mecanici – sisteme închise – care au suferit o perturbație inițială (scoatere din poziția de echilibru, comunicarea unui impuls din exterior), fiind apoi lăsați să oscileze liber fără nici o altă influență. Astfel de oscilatori efectuează oscilații *libere* numite și oscilații *proprii*.

Vom aborda studiul sistemelor oscilatorii libere pe modelul simplificat al unui *punct material* care oscilează *liniar armonic*. Din punct de vedere cinematic, vom caracteriza **mișcarea oscilatorie liniar armonică** prin:



- **direcția de mișcare** a oscilatorului (punctul material), căreia îi atașăm o axă de coordonate Ox , de obicei cu originea în poziția de echilibru a oscilatorului, axă pe care vom considera un sens pozitiv de deplasare;

- **poziția instantanee** M a oscilatorului este reperată față de poziția de echilibru prin vectorul de poziție \overline{OM} . Proiecția acestuia pe axa Ox reprezintă **elongația oscilației**, x . Aceasta ia, în mod alternativ, valori pozitive și negative prin deplasarea oscilatorului de o parte și de alta a originii axei.

Poziției de echilibru O îi corespunde $x=0$. Dependența de timp a elongației $x = x(t)$ reprezintă **legea sau ecuația de mișcare a oscilatorului**.

Experiența arată că mișcarea oscilatorie este limitată la un interval de lungime ale cărui extremități sunt simetrice față de poziția de echilibru.

Vom numi **amplitudine** a oscilației liniare armonice **valoarea maximă a elongației sale** și o vom nota cu A :

$$A = x_{\max} \quad (1)$$

Extremitățile cursei oscilatorului sunt punctele A de abscisă A și respectiv A' de abscisă $-A$, simetrice față de poziția O de echilibru.

- **Viteza liniară instantanee** a oscilatorului se definește prin:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (2)$$

având (după cum veți studia la analiza matematică) semnificația de *derivată* în raport cu timpul t a funcției $x(t)$ la momentul t , notată:

$$v = \frac{dx}{dt} = \dot{x} \quad (3)$$

Vectorul vitezei \vec{v} în mișcarea oscilatorie liniar armonică își modifică sensul în mod periodic, la fiecare capăt al cursei de oscilație.

- Numim **perioadă** a oscilației intervalul de timp T necesar efectuării unei oscilații complete, adică timpul scurs între două treceri consecutive ale oscilatorului prin aceeași poziție și în același sens. De exemplu, drumul $O \rightarrow A \rightarrow O \rightarrow A' \rightarrow O$ sau $A \rightarrow O \rightarrow A' \rightarrow O \rightarrow A$ constituie oscilații complete. Mișcarea oscilatorie liniar armonică este o mișcare *periodică*, mobilul trecând consecutiv prin aceeași poziție, în același sens și cu aceeași viteză la intervale de timp egale. Perioada sa, T , este o mărime constantă.

Atât funcția $x(t)$, care reprezintă ecuația de mișcare, cât și funcția $v(t)$, reprezentând legea vitezei în mișcarea oscilatorie liniar-armonică, sunt **funcții periodice** de timp:

$$x(t) = x(t + kT) \quad (4)$$

$$v(t) = v(t + nT) \quad (5)$$

unde $k, n \in \mathbb{N}$.

- Inversul perioadei reprezintă **frecvența oscilației**, adică numărul de oscilații efectuate în unitatea de timp:

$$\nu = \frac{1}{T} \quad (6)$$

Unitatea de măsură pentru T în SI este secunda, iar pentru frecvență este s^{-1} (Hertz).

- Oscilatorul liniar armonic este adesea caracterizat prin mărimea **frecvență unghiulară** sau **pulsatie**, ω , definită cinematic prin relația:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu \text{ (rad/s)} \quad (7)$$

Veți vedea în paragrafele următoare că pulsția este legată de proprietățile fizice ale oscilatorului. Pătratul său, ω^2 , reprezintă intensitatea forței de revenire raportată la valoarea deformării (elongației) și la masa oscilatorului.

• **Accelerația** instantanee a oscilatorului este, conform definiției studiate în clasa a IX-a:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (8)$$

având semnificația derivatei vitezei la momentul t , notată:

$$a = \frac{dv}{dt} = \dot{v} \quad (9)$$

Dacă ținem cont de (3) atunci accelerația momentanee reprezintă derivata a doua a coordonatei de poziție, x , la momentul respectiv de timp, notată:

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} \quad (10)$$

Prin definiție, mișcarea oscilatorie liniară este armonică dacă accelerația mobilului este în orice moment proporțională și de sens contrar cu elongația:

$$a = -\omega^2 x \quad (11)$$

constanta de proporționalitate fiind egală cu pătratul pulsației.

Relația (11) reprezintă *condiția de armonicitate*, definitorie pentru acest model de oscilator. Oscilatorul armonic servește drept model exact sau aproximativ pentru tratarea multor mișcări periodice din fizica clasică și fizica microobiectelor (cuantică).

1.1.2.1 Cinematica mișcării oscilatorii liniar armonice

Singura mișcare periodică pe care ați studiat-o în clasa a IX-a este *mișcarea circulară uniformă*. Să ne reamintim că mobilul aflat în mișcare circulară uniformă parcurge arce de cerc egale în intervale de timp egale, adică viteza lui liniară v este constantă în modul. Vectorul vitezei liniare \vec{v} , tangent în fiecare moment la traiectoria circulară, își modifică în mod continuu orientarea. Accelerația mișcării, datorată exclusiv variației orientării vitezei, se numește centripetă și are expresia:

$$a_{cp} = \frac{v^2}{R} \quad (1)$$

unde R – raza traiectoriei.

Perioada T , reprezentând intervalul de timp în care mobilul efectuează o rotație completă, este constantă.

Viteza unghiulară ω a mișcării circulare uniforme reprezintă unghiul la centru măsurat de raza vectoroasă R în unitatea de timp:

$$\omega = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} \quad (2)$$

Viteza unghiulară se măsoară în rad s^{-1} și este constantă în timp.

Modulul vitezei liniare și viteza unghiulară sunt legate prin relația:

$$v = \omega \cdot R \quad (3)$$

Frecvența mișcării circulare ν , reprezintă numărul de oscilații efectuate în unitatea de timp:

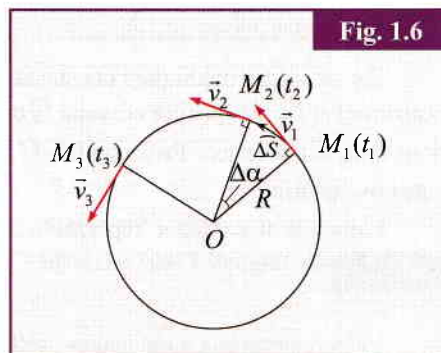
$$\nu = \frac{1}{T} \quad (4)$$

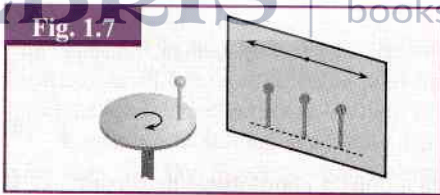
și se măsoară în $\text{s}^{-1} = \text{Hz}$ (Hertz)

Între frecvență și viteza unghiulară se stabilește relația:

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T} \quad (5)$$

Să vedem care este legătura dintre mișcarea oscilatorie liniar armonică de-a lungul unei direcții și mișcarea circulară uniformă, având în vedere periodicitatea amândurora. Vom putea stabili, pe baza acestei legături, *ecuația mișcării liniar armonice* $x(t)$, ecuația vitezei $v(t)$ și dependența de timp a accelerației $a(t)$, dând o interpretare geometrică pulsației (frecvenței unghiulare) oscilației armonice.

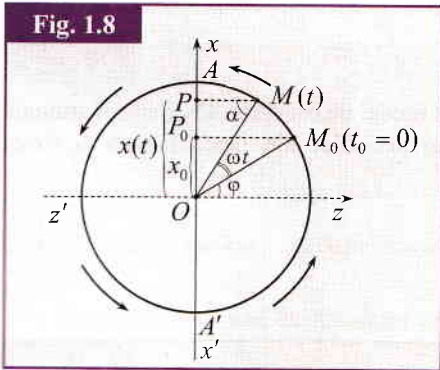




La marginea platoului unei centrifuge manuale, instalați o tijă verticală cu o bilă în vârf (fig. 1.7). Faceți întineric în sală și plasați centrifuga în apropierea unui perete sau ecran. De la o distanță oarecare luminați tija cu un fascicul paralel de lumină de la un aparat de proiecție. Urmăriți mișcarea umbrei bilei pe perete în timpul rotirii cu turație constantă a platoului. Este aceasta o mișcare oscilatorie liniară? Dar armonică?

Ecuția de mișcare a oscilatorului liniar-armonic

Vom demonstra că proiecția mișcării circulare uniforme pe direcția unuia dintre diametrele cercului (sau pe o direcție coplanară cu traiectoria circulară) este o mișcare oscilatorie armonică.



Fie $x'Ox$ o axă de coordonate pe direcția diametrului AA' al cercului de rază R , descris de un mobil în mișcare circulară uniformă (fig. 1.8). În timp ce acesta descrie cercul, proiecția sa pe axă descrie o mișcare oscilatorie liniară în jurul poziției centrale O , între extremitățile A și A' ale diametrului.

Fie M_0 poziția mobilului la momentul inițial, $t_0 = 0$, reperabilă prin unghiul la centru φ pe care raza vectorie \overline{OM}_0 îl face cu direcția Oz , ortogonală pe Ox .

Proiecția P_0 a punctului M_0 pe axa Ox va constitui poziția inițială în mișcarea oscilatorie liniară. Elongația corespunzătoare poziției inițiale:

$$\overline{OP}_0 \equiv x_0 = R \sin \varphi \quad (1)$$

Fie ω viteza unghiulară constantă a mobilului ce descrie cercul în sens pozitiv trigonometric (invers acelor de ceasornic) și fie M poziția acestuia la momentul $t(t > t_0)$. Unghiul la centru descris de raza vectorie în intervalul de timp $t - t_0 = t$ este ωt . Proiecția lui M pe axa Ox este punctul P . Acesta constituie poziția la momentul t în mișcarea oscilatorie.

Elongația instantanee reprezentată de segmentul \overline{OP} se calculează trigonometric din triunghiul dreptunghic OMP , în care unghiul $OMP \equiv \alpha = \omega t + \varphi$. Se obține:

$$x(t) = \overline{OP} = \overline{OM} \sin \alpha = R \sin(\omega t + \varphi) \quad (2)$$

Valoarea maximă a elongației oscilației se obține când M ajunge în extremitatea A a diametrului; în acest moment, proiecția lui M se află, de asemenea, în A . Rezultă că amplitudinea oscilației este egală cu raza R a cercului:

$$x_{\max} \equiv \mathcal{A} = R \quad (3)$$

Ecuția mișcării oscilatorii liniare obținută prin proiectarea descrisă se va scrie:

$$x(t) = \mathcal{A} \sin(\omega t + \varphi) \quad (4)$$

unde φ , conform (1) și (3), va fi dat de relația:

$$\varphi = \arcsin \frac{x_0}{\mathcal{A}} \quad (5)$$

Argumentul funcției sinus din ecuația (4), unghiul $(\omega t + \varphi)$, se numește **unghi de fază** sau pe scurt **fază mișcării** la momentul t .

La momentul inițial $t_0 = t$, faza mișcării este unghiul φ , numit **fază inițială** (sau fază la originea timpului).

Din punct de vedere matematic, funcția sinusoidală (4) ce descrie mișcarea oscilatorie este continuă pe intervalul $t \in [0, \infty)$, mărginită (ia valori între limitele $x_{\max} = \mathcal{A}$ și $x_{\min} = -\mathcal{A}$) și periodică. Perioada oscilației obținute prin proiecție este evident egală cu cea a mișcării circulare. Mobilul M și oscilatorul P ajung simultan în extremitățile diametrului, așa încât în timpul în care mobilul M efectuează o rotație completă, proiecția sa P efectuează o oscilație completă.

Frecvența oscilatorului este și ea egală cu frecvența ν a mișcării circulare. Frecvența unghiulară (pulsția) a oscilatorului reprezintă viteza unghiulară ω a mobilului în mișcare circulară, aflându-se în aceeași relație cu perioada T :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu \quad (6)$$

Periodicitatea se verifică imediat în baza periodicității funcției sinus:

$$\begin{aligned}
 x(t+kT) &= \mathcal{A} \sin\left[\frac{2\pi}{T}(t+kT) + \varphi\right] = \mathcal{A} \sin\left(2\pi\frac{t}{T} + 2k\pi + \varphi\right) \\
 &= \mathcal{A} \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi\right) = \mathcal{A} \sin(\omega t + \varphi) = x(t)
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

Tot pe baza periodicității vom alcătui, în vederea trasării graficului, tabelul de variație a funcției $x(t)$ doar pentru prima perioadă de oscilație, $t \in [0, \infty)$, știind că valorile ei se repetă ca mărime, direcție și sens de variație după o perioadă sau un multiplu întreg al acesteia.

Exemplu aplicativ 1

Enunț: Trasați graficul dependenței de timp a elongației unui oscilator liniar descris de ecuația:

$$x_1(t) = 5 \sin \frac{\pi t}{2} \text{ (cm)} \tag{8}$$

Soluție: Amplitudinea oscilației este $\mathcal{A} = 5 \text{ cm}$, pulsația $\omega = \frac{\pi}{2} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, iar faza la originea timpului, $\varphi = 0$.

Perioada oscilației, $T = \frac{2\pi}{\omega} = 4 \text{ s}$.

Alcătuiți tabelul de variație pentru o perioadă.

$t \text{ (s)}$	0	$\frac{T}{8} = 0,5$	$\frac{T}{4} = 1$	$\frac{T}{2} = 2$	$\frac{3T}{4} = 3$	$T = 4$
faza: $\alpha = \frac{\pi t}{2}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$x_1 = 5 \sin \frac{\pi t}{2} \text{ (cm)}$	0	$\nearrow \frac{5\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow 5$	$\searrow 0$	$\searrow -5$	$\nearrow 0$

Graficul funcției $x(t)$ este redat prin sinusoida din fig. 1.9, obținută prin extinderea, în baza periodicității, a domeniului de la $t \in [0, T]$ la $t \in [0, \infty)$.

Ordonata la originea timpului, având semnificația de poziție inițială a oscilatorului, este în acest caz nulă, $x_{01} = 0$. Oscilatorul se află la momentul inițial în poziție de echilibru, căci faza la origine $\varphi = 0$.

Să observăm că punctele B, D, F din grafic, corespunzând aceleași valori x a elongației, dar și aceluiași sens de variație (descrescător) al acesteia, sunt separate prin intervale temporale egale cu o perioadă sau un multiplu întreg al acesteia. Deși punctele A și B (sau A și D etc.) corespund și ele aceleași valori a elongației, x , ele diferă prin sensul de variație a elongației: pentru A , elongația crește, iar pentru B sau D elongația descrește. Prin urmare, $t_B - t_A \neq T$ (respectiv $t_D - t_A \neq kT, k \in \mathbf{N}$).

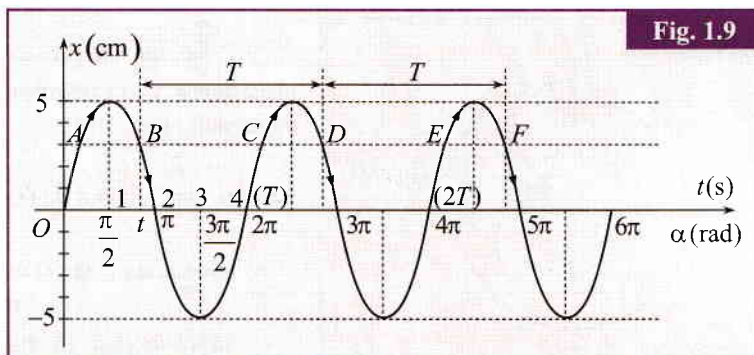


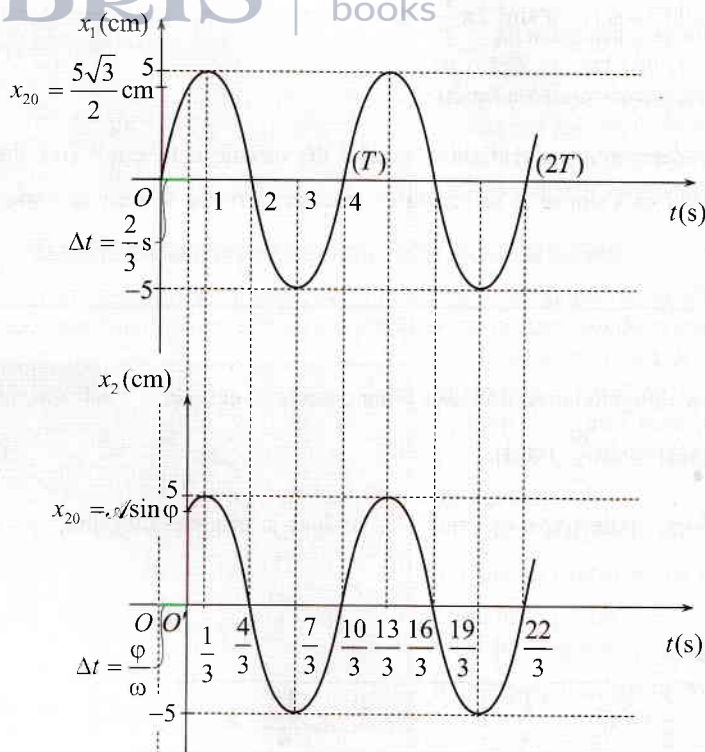
Fig. 1.9

Exemplu aplicativ 2

Enunț: Reprezentați acum graficul dependenței de timp a elongației oscilatorului descris de ecuația:

$$x_2(t) = 5 \sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}\right) \text{ (cm)} \tag{9}$$

Fig. 1.10



Soluție: Să observăm că amplitudinea și pulsația oscilatorului sunt aceleași ca în prima aplicație. Cele două oscilații diferă prin faza la originea timpului. În al doilea caz, aceasta are valoarea:

$$\varphi = \frac{\pi}{3} \quad (10)$$

cea ce înseamnă că față de prima oscilație, aceasta este defazată în avans cu $\frac{\pi}{3}$ rad. Graficul lui $x_2(t)$ se obține din primul grafic printr-o translație (fig. 1.10) în lungul axei timpului, echivalentă cu decalajul temporal dintre cei doi oscilatori:

$$\Delta t = \frac{\varphi}{\omega} = \frac{\varphi}{2\pi} \cdot T = \frac{T}{6} = \frac{2}{3} \text{ s} \quad (11)$$

Ordonata la originea timpului, adică poziția inițială a oscilatorului, va fi în acest caz:

$$x_{02} = \mathcal{A} \sin \varphi = \frac{5\sqrt{3}}{2} \text{ cm} \quad (12)$$

Ecuția vitezei oscilatorului liniar

Viteza liniară \vec{v}_t în mișcarea circulară uniformă este tangentă la cerc în punctul M , unde se află mobilul la momentul de timp t , iar modulul său păstrează valoarea constantă:

$$v_t = \omega R = \omega \mathcal{A} \quad (1)$$

Proiecția vitezei tangențiale \vec{v}_t pe axa Ox reprezintă viteza instantanee v a oscilatorului liniar, aflat în poziția P de elongație x , la momentul t (fig. 1.11):

$$v = v_x = v_t \cos \alpha \quad (2)$$

unde α este unghiul de fază la momentul t :

$$\alpha = \omega t + \varphi \quad (3)$$

Înlocuind (1) și (3) în (2) obținem ecuația vitezei:

$$v(t) = \mathcal{A}\omega \cos(\omega t + \varphi) \quad (4)$$

Să observăm că funcția $v(t)$ este continuă și periodică pentru $t \in [0, \infty)$, ca și $x(t)$.

Valorile extreme ale vitezei în mișcarea oscilatorie ($v_{\max} = \mathcal{A}\omega$ și respectiv $v_{\min} = -\mathcal{A}\omega$) sunt atinse la trecerea oscilatorului prin poziția centrală O (fig. 1.12), într-un sens și în altul, iar anularea vitezei de oscilație are loc în pozițiile extreme ale cursei, A și A' , în care elongația atinge valorile maxime \mathcal{A} și respectiv $-\mathcal{A}$.

Oricum, ne așteptăm la acest defazaj între viteza $v(t)$ și elongația corespunzătoare, $x(t)$, ele fiind descrise matematic prin funcții sinus și cosinus ale aceluiași argument, între care există relația cunoscută:

$$\cos(\omega t + \varphi) = \sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \quad (5)$$

Fig. 1.11

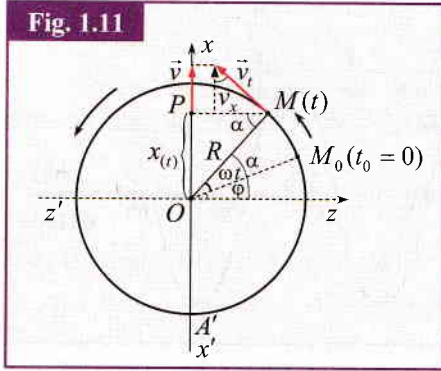
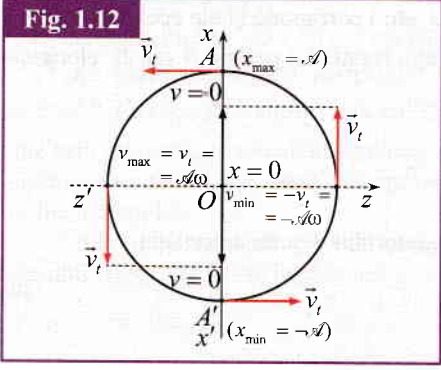


Fig. 1.12



Rezultă că viteza oscilatorului linear este, în orice moment de timp, defazată cu $\frac{\pi}{2}$ radiani (90°) în avans față de elongație. Se spune că viteza este în **cuadratură avans față de elongație**.

Observație

Analitic, știm de la matematică, că în orice punct de extrem al unei funcții continue și derivabile derivata sa de ordin I se anulează. Ținând cont că $x = \pm A$ sunt puncte de maxim, respectiv minim ale elongației și că derivata acesteia în raport cu timpul reprezintă viteza în punctele (la momentele) respective, deducem că viteza se anulează în pozițiile extreme ale cursei oscilatorului.

$$x_m = \pm A \Rightarrow v = 0 \tag{6}$$

Viteza oscilatorului este pozitivă în jumătatea de perioadă corespunzătoare deplasării de la A' la A și negativă în jumătatea de perioadă destinată deplasării de la A spre A' .

Reprezentarea grafică a vitezei ca funcție de timp ilustrează alternanța semnului vitezei și defazajul acesteia în raport cu elongația.

Pentru oscilatorul:

$$x_1(t) = 5 \sin \frac{\pi}{2} t \text{ (cm)}$$

din exemplul 1, viteza are forma analitică

$$v_1(t) = \frac{5\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} \cdot t \text{ (cm/s)}$$

și reprezentarea grafică din fig. 1.13.a.

Pentru oscilatorul:

$$x_2(t) = 5 \sin \left(\frac{\pi}{2} t + \frac{\pi}{3} \right) \text{ (cm)},$$

graficul dependenței vitezei

$$v_2(t) = \frac{5\pi}{2} \cos \left(\frac{\pi}{2} t + \frac{\pi}{3} \right) \text{ (cm/s)}$$

este ilustrat în fig. 1.13.b. Remarcați că ordonata la originea timpului reprezintă viteza inițială a oscilatorului:

$$v_0 = v(t_0 = 0) = A\omega \cos \varphi \tag{7}$$

$$v_{01} = \frac{5\pi}{2} \text{ cm s}^{-1}$$

$$v_{02} = \frac{5\pi}{4} \text{ cm s}^{-1}$$

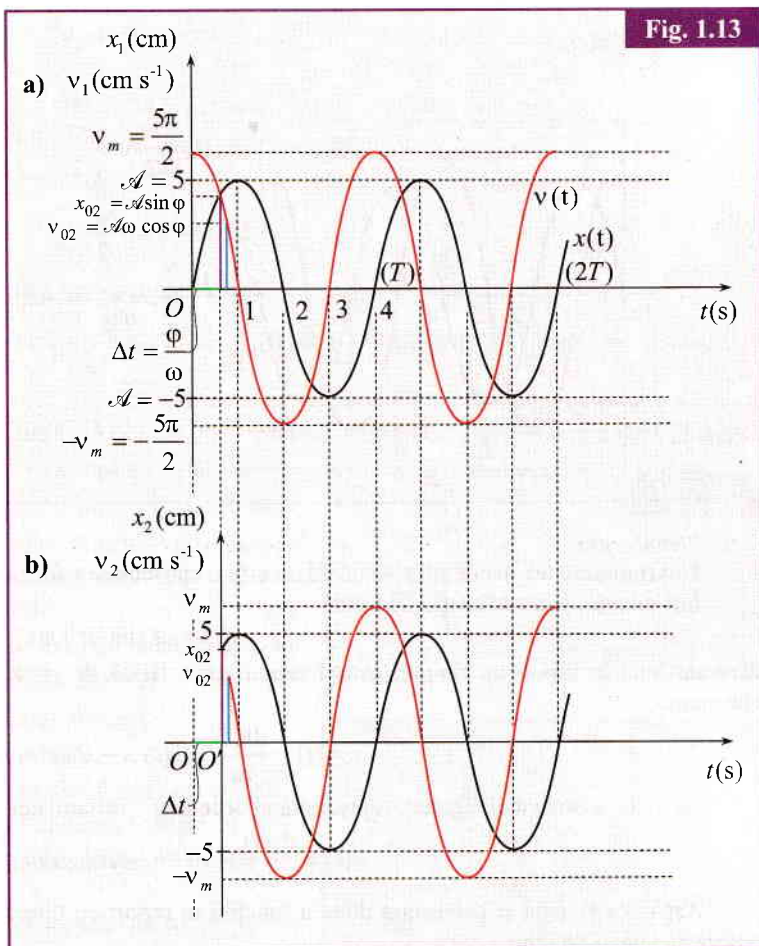


Fig. 1.13

Accelerația oscilatorului linear

Obținem expresia accelerației oscilatorului la momentul t prin proiectarea accelerației instantanee centripete a mobilului M în mișcare circulară uniformă (fig. 1.14).

Cum

$$a_c = \frac{v_t^2}{R} = \omega^2 R = \omega^2 A \tag{1}$$

rezultă:

$$a = -a_c \sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi) \tag{2}$$

Este de remarcat faptul că la orice moment de timp, vectorul de poziție \vec{OP} al oscilatorului și vectorul accelerație \vec{a} sunt de sensuri opuse.

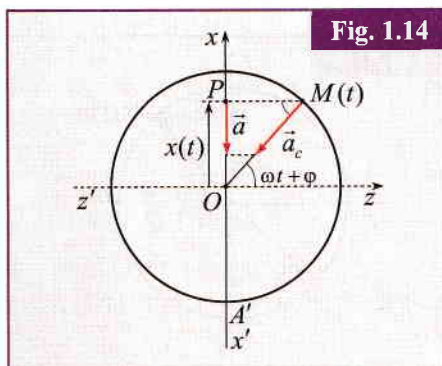


Fig. 1.14

Aceasta revine la a spune că *acelerația* $a(t)$ și *elongația* $x(t)$ sunt în orice moment de semne contrare.

Comparând ecuația mișcării oscilatorii studiate:

$$x(t) = \mathcal{A} \sin(\omega t + \varphi) \quad (3)$$

cu expresia accelerației dată de (2) ajungem la relația:

$$a = -\omega^2 x \quad (4)$$

Faptul că accelerația mișcării oscilatorii liniare este în orice moment proporțională cu elongația și de sens contrar acesteia face că această mișcare să fie **armonică**.

Accelerația oscilației liniar-armonice obținute prin proiectarea mișcării circulare uniforme este defazată față de elongație cu π radiani (180°):

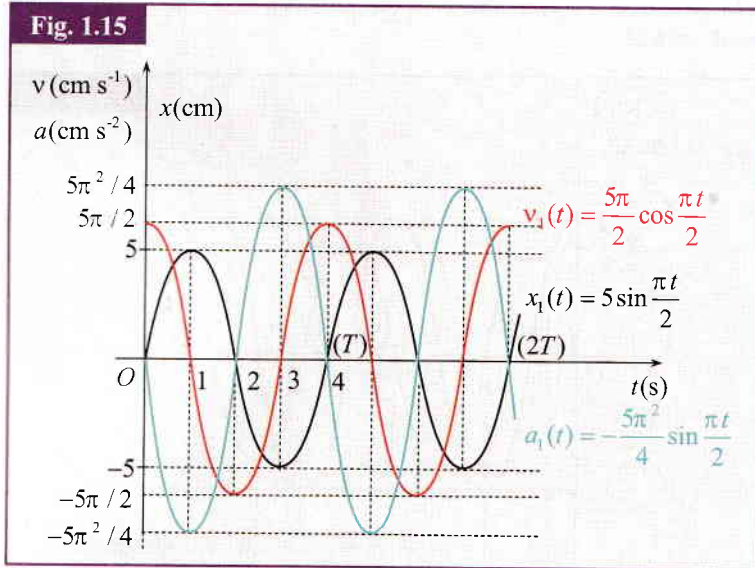
$$\begin{aligned} a(t) &= -\omega^2 \mathcal{A} \sin(\omega t + \varphi) = \\ &= \omega^2 \mathcal{A} \sin(\omega t + \varphi + \pi) \end{aligned} \quad (5)$$

iar față de viteza cu $\frac{\pi}{2}$ radiani în avans.

Spunem că **accelerația este în opoziție de fază cu elongația și în cuadratură avans față de viteză**.

Aceste defazaje sunt puse în evidență și prin compararea graficelor accelerației, vitezei și elongației ca funcții de timp, trasate în același sistem de axe (fig. 1.15).

Accelerația devine maximă ($\mathcal{A}\omega^2$) când elongația este minimă ($-\mathcal{A}$) și invers. Ambele mărimi se anulează simultan, la trecerea oscilatorului prin poziția centrală O ($x = 0, a = 0$).



***Observații**

1. Armonicitatea oscilațiilor sinusoidale este o consecință a formei lor analitice.

Într-adevăr, pentru funcția de forma:

$$x(t) = \mathcal{A} \sin(\omega t + \varphi) \quad (6)$$

derivata întâi în raport cu timpul, având semnificația fizică de viteză instantanee a oscilatorului, va avea expresia cunoscută:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t) = \omega \mathcal{A} \cos(\omega t + \varphi) \quad (7)$$

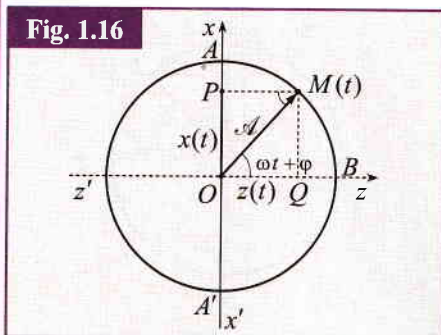
Derivata a doua a elongației, reprezentând accelerația instantanee, este de asemenea funcție sinusoidală de timp:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \dot{v}(t) = -\omega^2 \mathcal{A} \sin(\omega t + \varphi) \quad (8)$$

Astfel că funcția și derivata a doua a funcției în raport cu timpul au, la orice moment de timp t , valori direct proporționale și de semne opuse:

$$a(t) = -\omega^2 x(t) \quad (9)$$

ceea ce determină armonicitatea oscilațiilor.



2. Trebuie menționat că atât proiecția mișcării circulare uniforme pe direcția Ox a diametrului $\overline{AA'}$ al cercului, cât și proiecția pe direcția Oz a diametrului $\overline{BB'}$ perpendicular pe $\overline{AA'}$ constituie mișcări oscilatorii liniar armonice (fig. 1.16).

Într-adevăr, oscilația obținută prin proiectarea pe Oz are ecuația:

$$z(t) = \mathcal{A} \cos(\omega t + \varphi) \quad (10)$$

Pulsauția ω și amplitudinea \mathcal{A} sunt aceleași. Cele două oscilații perpendiculare diferă doar prin faza la originea timpului:

$$z(t) = \mathcal{A} \cos(\omega t + \varphi) = \mathcal{A} \sin(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}) \quad (11)$$

Defazajul între oscilații se menține constant, egal cu $\frac{\pi}{2}$.

Putem astfel privi mișcarea circulară uniformă ca rezultat al compunerii a două mișcări oscilatorii liniar armonice de aceeași amplitudine și frecvență, perpendiculare și defazate cu $\frac{\pi}{2}$ una față de cealaltă.

Considerând planul xOz ca plan complex, vectorul de poziție \overline{OM} de modul \mathcal{A} este determinat prin afixul său complex, notat $\underline{\mathcal{A}}$:

$$\underline{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \cos(\omega t + \varphi) + i \mathcal{A} \sin(\omega t + \varphi) = \mathcal{A} e^{i\omega t} \cdot e^{i\varphi} \quad (12)$$

Afixul $\underline{\mathcal{A}}$ reprezintă mișcarea oscilatorie liniar armonică, întrucât atât

$$\text{Re } \underline{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \cos(\omega t + \varphi) = z(t) \quad (13)$$

cât și

$$\text{Im } \underline{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \sin(\omega t + \varphi) = x(t) \quad (14)$$

reprezintă elongațiile a doi oscilatori liniar armonici.

Mărimea complexă $\underline{\mathcal{A}}$ se numește elongație complexă armonică. Viteza complexă și accelerația complexă vor fi reprezentate prin derivatele de ordinul întâi și respectiv doi ale elongației complexe:

$$\underline{v} = \dot{\underline{\mathcal{A}}} = i\omega \mathcal{A} e^{i\omega t} \cdot e^{i\varphi} = i\omega \underline{\mathcal{A}} \quad (15)$$

$$\underline{a} = \dot{\underline{v}} = -\omega^2 \mathcal{A} e^{i\omega t} \cdot e^{i\varphi} = -\omega^2 \underline{\mathcal{A}} \quad (16)$$

Reprezentarea fazorială a oscilației liniar armonice

Reprezentarea mărimilor oscilatorii prin vectori, numiți *fazori*, reduce multe probleme legate de oscilații la probleme de geometrie elementară.

Un *fazor* este un vector rotitor în planul xOz (fig. 1.17) a cărui origine este fixă și coincide cu originea axelor de coordonate; extremitatea fazorului se rotește uniform în sens pozitiv trigonometric cu o viteză unghiulară ω egală cu pulsația oscilației; la momentul inițial $t_0 = 0$, fazorul face cu axa Oz un unghi φ egal cu faza inițială a oscilației; modulul fazorului corespunde amplitudinii oscilației reprezentate. Astfel, modulul fazorului prin care se reprezintă elongația unei mișcări oscilatorii liniar armonice:

$$x(t) = \mathcal{A} \sin(\omega t + \varphi)$$

corespunde amplitudinii \mathcal{A} . Proiecția fazorului, la orice moment de timp t , pe axa Ox este chiar elongația mișcării la acel moment $x(t)$.

Fazorul ce reprezintă viteza oscilatorului liniar armonic:

$$v(t) = \mathcal{A}\omega \cos(\omega t + \varphi)$$

se rotește cu aceeași viteză unghiulară ω , are modulul egal cu amplitudinea vitezei $v_{\max} = \mathcal{A}\omega$ și este, la orice moment de timp, defazat cu $\pi/2$ înaintea fazorului elongației (cuadratură avans). Poziția relativă a celor doi fazori nu se modifică în timpul rotirii lor (fig. 1.18)

Fazorul reprezentativ pentru accelerația oscilatorului armonic:

$$a(t) = -\mathcal{A}\omega^2 \sin(\omega t + \varphi)$$

va avea modulul $\mathcal{A}\omega^2$, se va roti cu aceeași viteză unghiulară ω și va fi în permanență opus fazorului elongației, ceea ce corespunde defazajului de π radiani existent între accelerație și elongație (opозиție de fază).

În raport cu fazorul vitezei, fazorul accelerației este în cuadratură avans (fig. 1.18).

Reprezentarea oscilațiilor armonice prin fazori este foarte utilă în studiul circuitelor de curent alternativ și în optică. Metoda fazorială de tratare a oscilațiilor a fost pusă la punct de fizicianul francez Fresnel.

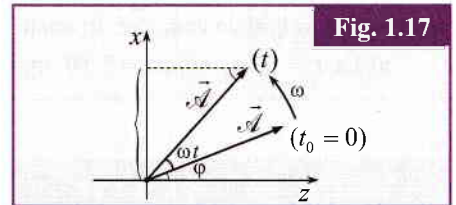


Fig. 1.17

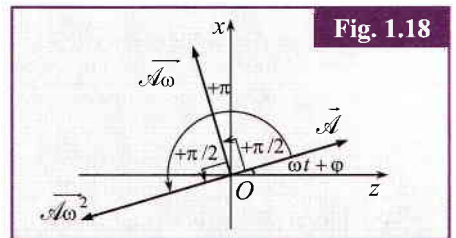


Fig. 1.18

Exercițiu aplicativ

Enunț: Scrieți ecuația de mișcare a unui oscilator cu frecvența $\nu = 50$ Hz dacă la momentul inițial:

a) este lăsat să oscileze liber dintr-o poziție aflată pe direcția de oscilație Ox la distanța $x_0 = 3$ cm de poziția sa de echilibru O ;

b) se află în poziția de echilibru $x_0 = 0$ și i se comunică un impuls $p_0 = \frac{\pi}{2}$ kg · m/s pe direcția de oscilație;

c) se află în punctul de abscisă $x_0 = 4$ cm și are viteza $v_0 = 3\pi$ ms⁻¹.

Soluție: Scrierea ecuației oscilației liniar armonice:

$$x(t) = \mathcal{A} \sin(\omega t + \varphi)$$

presupune cunoașterea pulsației, ω , a amplitudinii, \mathcal{A} și a fazei la originea timpului, φ .

Pulsația se determină din relația:

$$\omega = 2\pi\nu = 100\pi \text{ rad s}^{-1}$$

Constantele \mathcal{A} și φ sunt unic determinate de condițiile inițiale ale problemei, adică de poziția inițială x_0 a oscilatorului și de viteza acestuia la momentul inițial, v_0 .

Pentru $t_0 = 0$, din ecuația de mișcare și ecuația vitezei se obține sistemul de două ecuații cu două necunoscute:

$$\begin{cases} x(t_0 = 0) \equiv x_0 = \mathcal{A} \cdot \sin \varphi \\ v(t_0 = 0) \equiv v_0 = \mathcal{A}\omega \cos \varphi \end{cases} \quad (1)$$

Pentru aflarea lui \mathcal{A} și φ , punem ecuațiile sistemului sub forma:

$$\sin \varphi = \frac{x_0}{\mathcal{A}}; \quad \cos \varphi = \frac{v_0}{\mathcal{A}\omega} \quad (2)$$

Prin ridicarea la pătrat și adunarea membru cu membru a ecuațiilor, obținem pentru amplitudine:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{\omega} \sqrt{v_0^2 + x_0^2 \omega^2} \quad (3)$$

Împărțind ecuațiile (2) membru cu membru, găsim:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{x_0 \omega}{v_0} \quad (4)$$

Am expus aici metoda generală de calcul pentru aflarea amplitudinii și fazei inițiale. Ea poate fi particularizată pentru condiții inițiale concrete. În unele situații, rezolvarea sistemului (1) devine mult mai ușoară:

a) La $t_0 = 0$, $x_0 = 3$ cm = $3 \cdot 10^{-2}$ m, iar $v_0 = 0$. Sistemul de ecuații (1) este:

$$\begin{cases} 3 \cdot 10^{-2} = \mathcal{A} \cdot \sin \varphi \\ 0 = \mathcal{A}\omega \cos \varphi \end{cases} \quad (5)$$

Rezultă direct $\cos \varphi = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, iar $\mathcal{A} = 3 \cdot 10^{-2}$ m.

Ecuația oscilatorului este în acest caz: $x(t) = 0,03 \cdot \sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$ (m) adică:

$$x(t) = 0,03 \cdot \cos 100\pi t \text{ (m)} \quad (6)$$

b) La $t_0 = 0$, $x_0 = 0$, iar $v_0 = \frac{p_0}{m} = \pi$ ms⁻¹. Înlocuind în (1): $\begin{cases} 0 = \mathcal{A} \cdot \sin \varphi \\ \pi = 100\pi \mathcal{A} \cos \varphi \end{cases}$

Rezultă imediat: $\varphi = 0$, și $\mathcal{A} = 0,01$ m. Ecuația mișcării se va scrie:

$$x(t) = 0,01 \cdot \sin 100\pi t \text{ (m)} \quad (7)$$

c) În această situație este indicată aplicarea rezultatelor metodei generale.

Înlocuind valorile lui x_0 și v_0 în ecuația (3) obținem valoarea amplitudinii:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{100\pi} \sqrt{(3\pi)^2 + (4 \cdot 10^{-2} \cdot 10^2 \pi)^2} \text{ m} = 0,05 \text{ m}$$

Din relația (4) găsim pentru faza inițială:

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{4 \cdot 10^{-2} \cdot 10^2 \pi}{3\pi} = \operatorname{arctg} \frac{4}{3}$$

Ecuația oscilatorului devine:

$$x(t) = 0,05 \cdot \sin\left(100\pi t + \operatorname{arctg} \frac{4}{3}\right) \text{ (m)} \quad (8)$$

Cele mai simple sisteme oscilante libere sunt pendulul elastic și pendulul matematic (simplu).

În cele ce urmează vom analiza rolul forței de revenire și al inerției sistemului în determinarea mișcărilor oscilatorii ale celor două sisteme, demonstrând că, în absența frecărilor, oscilațiile acestora pot fi considerate liniar armonice.

A. Studiul pendulului elastic

Pendulul elastic este constituit dintr-un corp de mici dimensiuni (punct material) de masă m , legat de un resort presupus perfect elastic și fără masă, având constanta de elasticitate k .

Îndepărtând masa m din poziția de echilibru pe direcția resortului și eliberând-o apoi, observăm oscilațiile libere ale acesteia în jurul poziției de echilibru (fig. 1.19).

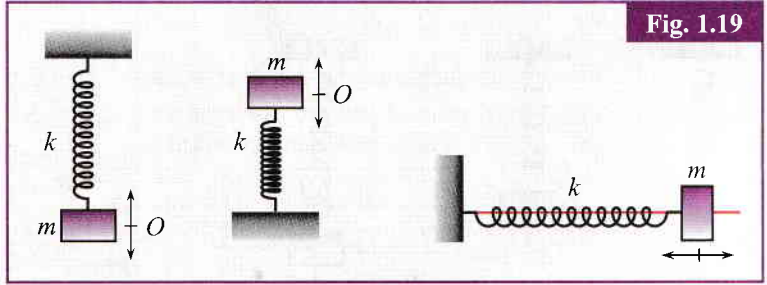


Fig. 1.19

EXPERIMENT

Pentru înregistrarea mișcării oscilatorii a masei m suspendate de resortul având constanta de elasticitate k , se poate folosi osciloscopul catodic sau calculatorul, prin convertirea variațiilor poziției corpului în tensiune electrică variabilă.

Pentru aceasta, se fixează de corpul m o tijă metalică ușoară a cărei extremitate se scufundă mai mult sau mai puțin într-o cuvă cu o soluție conductoare. La suprafața lichidului și pe fundul acestuia se găsesc două plăci conductoare plane legate la o baterie (fig. 1.20). Între tija metalică și una dintre plăcile cuvei se conectează un osciloscop catodic. El măsoară diferența de potențial între una dintre plăci (C) și extremitatea tijei. Această tensiune, U , este proporțională cu distanța d dintre extremitatea tijei și placa conductoare C. În timpul oscilațiilor, această distanță variază, așa încât tensiunea înregistrată va fi de asemenea variabilă. Potrivind baza de timp în mod convenabil, pe ecranul osciloscopului vom vizualiza mișcarea extremității tijei, deci a masei m (fig. 1.21). Mișcarea este periodică, sinusoidală (ușor amortizată din cauza frecărilor slabe ale tijei cu lichidul și ale întregului sistem oscilant cu aerul). Putem determina perioada T prin citiri pe ecranul osciloscopului, folosindu-ne de indicația bazei de timp.

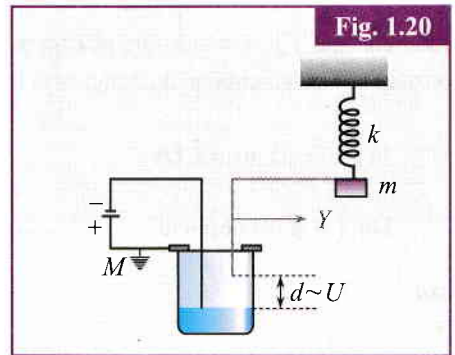


Fig. 1.20

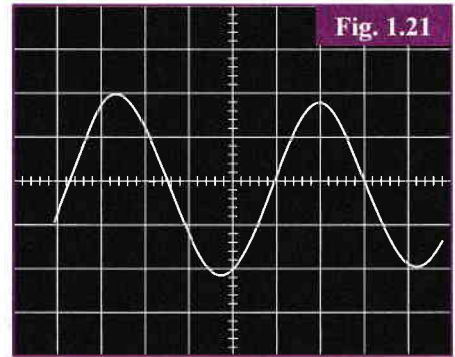


Fig. 1.21

Reluăm experimentul, modificând amplitudinea mișcării. Constatăm că perioada nu se modifică (fig. 1.22). Dacă însă înlocuim corpul cu un altul de masă diferită, perioada se modifică.

În fig. 1.23 sunt redată înregistrările suprapuse ale unui oscilator constituit din același resort, dar cu două mase diferite, $m_2 > m_1$. Puteți observa că $T_2 > T_1$.

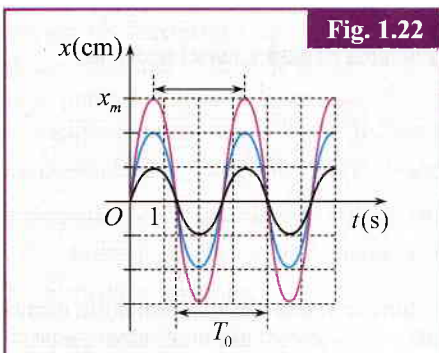


Fig. 1.22

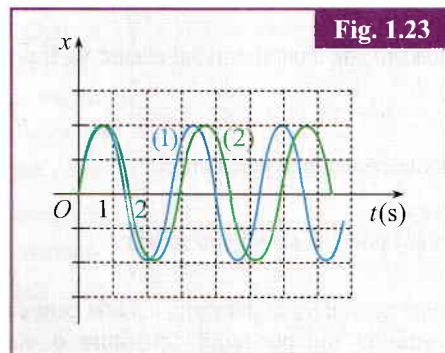
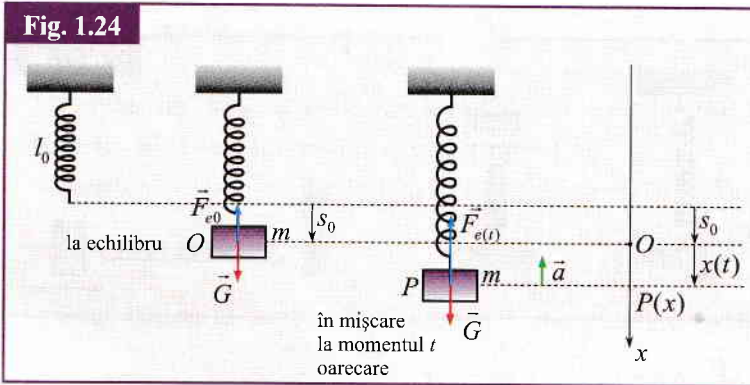


Fig. 1.23

Sistemul studiat este punctul material de masă m supus greutății proprii și forței elastice cu care acționează asupra sa resortul ideal având constanta de elasticitate k (fig. 1.24). La echilibru, punctul material m ocupă poziția O , iar resortul este alungit cu s_0 . Forțele ce acționează asupra lui m sunt greutatea \vec{G} și forța elastică \vec{F}_{e_0} , corespunzătoare alungirii s_0 . După cum știți, intensitatea forței elastice este proporțională cu deformarea resortului.



Conform principiului I al dinamicii, vom scrie:

$$\vec{G} + \vec{F}_{e_0} = \vec{0} \quad (1)$$

În proiecția pe axa Ox , orientată vertical în jos:

$$mg - ks_0 = 0 \quad (2)$$

Resortul este deformat (alungit sau comprimat) și eliberat fără viteză inițială (momentul $t_0 = 0$). Punctul material m oscilează liniar. La un moment oarecare de timp t , fie $x(t)$ elongația punctului față de poziția de echilibru. Alungirea totală a resortului, $s_0 + x$, determină apariția unei

forțe elastice \vec{F}_e orientată spre poziția de echilibru. Fie \vec{a} accelerația oscilatorului la momentul considerat. Se aplică principiul fundamental al dinamicii sub formă vectorială:

$$\vec{G} + \vec{F}_e = m\vec{a} \quad (3)$$

În proiecția pe axa Ox :

$$mg - k(s_0 + x) = ma \quad (4)$$

Din (2) și (4) obținem:

$$ma = -kx \quad (5)$$

sau

$$a = -\frac{k}{m}x \quad (6)$$

Cum momentul de timp este oarecare, tragem concluzia că în timpul oscilației accelerația este proporțională cu elongația și de sens contrar acesteia, deci că oscilatorul considerat este *armonic*. Conform condiției de armonicitate, constanta de proporționalitate între $a(t)$ și $x(t)$ este pătratul pulsației proprii de oscilație.

Deducem că pentru pendulul elastic, pulsația proprie este:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (7)$$

Să observăm că aceasta nu depinde decât de elasticitatea resortului și de masa oscilatorului. Într-adevăr, forța de revenire, orientată în orice moment spre poziția de echilibru, este forța elastică:

$$F_r = F_e = -kx \quad (8)$$

Interpretarea dinamică a pătratului pulsației proprii ca raport al forței de revenire pe unitatea de deformare și al masei sistemului ne conduce la același rezultat:

$$\omega^2 = \frac{F_r}{m} = \frac{F_e}{m} = \frac{k}{m} \quad (9)$$

Perioada proprie a oscilatorului elastic va fi proporțională cu rădăcina pătrată a masei acestuia:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (10)$$

ceea ce se poate constata experimental.

Observație

Relația (6) poate fi scrisă sub forma:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (11)$$

Din punct de vedere matematic, ecuația prin care sunt legate o funcție și una sau mai multe din derivatele sale în raport cu variabila independentă constituie o ecuație diferențială. Oscilatorul armonic este descris de ecuația